

Probleme de antrenament - Setul 1

Problema 1

- a) Să se afle $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^2 - (m - 2)x - 2m + 1 = 0$ să aibă soluții de semne contrare.
- b) Să se afle $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $4^t - (m - 2)2^t - 2m + 1 = 0$ să aibă soluții de semne contrare.

Problema 2

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) Să se calculeze A^n pentru orice $n \in \mathbb{Z}$.
- b) Să se afle toți $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât suma elementelor matricei A^n să fie nulă.

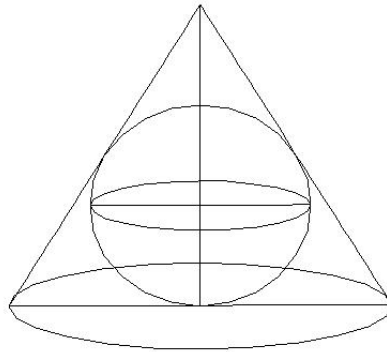
Problema 3

Să se determine imaginea funcției

$$f : \{x \in \mathbb{R} ; |x| \geq 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2\arctg|x| + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

Problema 4

Să se determine raza conului circular drept de volum minim circumscris unei sfere de rază r .



Problema 5

Care dintre numerele e^π sau π^e este mai mare?

Problema 6

Fie ecuația $y + \sin y - t^2 = 0$, necunoscuta fiind y .

- a) Să se demonstreze că pentru orice $t \in \mathbb{R}$, ecuația are o unică soluție.
- b) Să se demonstreze că pentru orice $t \in (-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$, ecuația are o unică soluție $y \in (-\pi, \pi)$.
- c) Să se studieze extremele funcției $y : (-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) \rightarrow (-\pi, \pi)$, care verifică relația $y(t) + \sin y(t) - t^2 = 0$, pentru orice $t \in (-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$.

Probleme de antrenament - Setul 2

Problema 1

- a) Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ecuația matriceală $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- b) Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ecuația matriceală $X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- c) Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ecuația matriceală $X^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

Problema 2

Să se determine toate matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea $A^2 = A$.

Problema 3

- a) Arătați că $f(n) = g(n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, unde

$$f(n) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}, \quad g(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1}.$$

- b) Demonstrați că $(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 4

Elevii A și B participă la următorul joc:

"Se dă ecuația $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$. Mai întâi A dă o valoare număr întreg unuia dintre coeficienți. Apoi B dă o valoare număr întreg unuia dintre coeficienții necunoscuți. În final A alege valoarea ultimului coeficient încă necunoscut."

Demonstrați că A poate face ca toate cele trei soluții ale ecuației obținute să fie numere întregi.

Problema 5

- a) Dacă $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, să se calculeze $s_n = t^2 + t^3 + \dots + t^n$ și $S_n = 2t + 3t^2 + \dots + nt^{n-1}$, pentru $t \in \mathbb{R}$.
- b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, pentru $t \in (-1, 1)$.
- c) Să se rezolve ecuația $\frac{\ln(x^2)}{(\ln x)^2} + \frac{\ln(x^3)}{(\ln x)^3} + \frac{\ln(x^4)}{(\ln x)^4} + \dots = 8$, știind că $x > e$.

Problema 6

Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+a^x)}{\ln(1+b^x)}$, pentru $a, b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$.

Problema 1.

a) Fiind date punctele A, B și dreapta d ca în figura 1 sa se determine un punct P pe dreapta d astfel încât distanța $|AP| + |BP|$ să fie minimă.

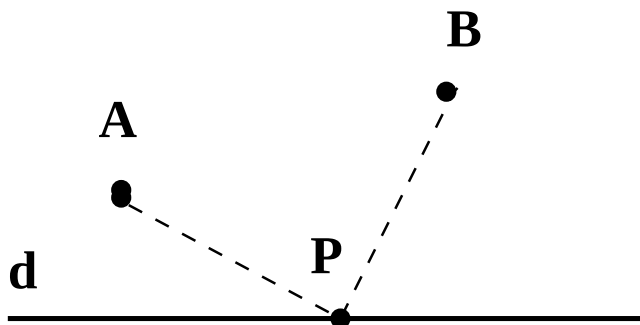


Figure 1:

b) Fiind date punctele A, B și dreptele d și e ca în figura 1 sa se determine punctele $P \in d$ și $Q \in e$ astfel încât distanța $|AP| + |PQ| + |QB|$ să fie minimă.

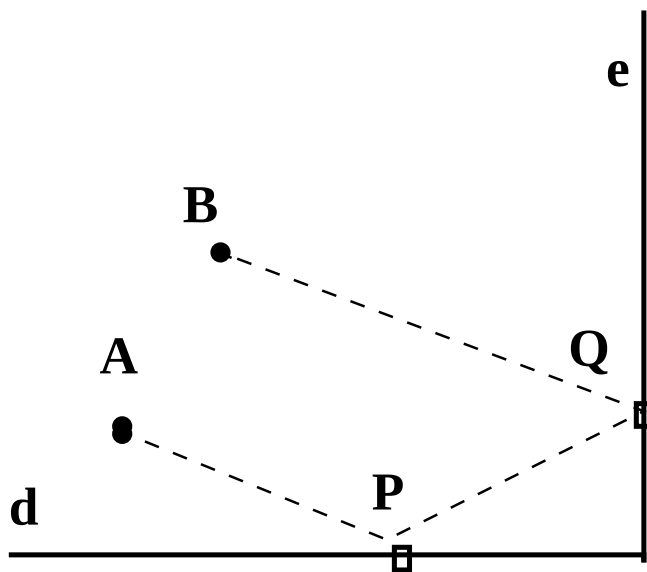


Figure 2:

c) Se consideră tetraedrul $VABC$. Să se determine un punct $M \in VB$ astfel încât distanța $|AM| + |MC|$ să fie minimă.

Problema 2.

Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile ecuației

$$x^2 + 2mx + 1 = 0$$

să satisfacă relațiile:

- a) $x_1, x_2 \leq 2$.
- b) $x_1, x_2 \geq 1$.
- c) $0 < x_1 \leq 1 \leq x_2 \leq 2$.

Problema 3.

Să se determine termenul general al șirurilor determinate de relațiile de recurență:

- a) $a_{n+1} = 3a_n + \frac{1}{2}$.
- b) $a_{n+1} = 3a_n + 2a_{n-1}$.
- c) $\begin{cases} a_{n+1} = \alpha b_n \\ b_{n+1} = \beta a_n \end{cases}$.

Problema 4.

Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel ca

$$f(x) = |x - 1|g(x).$$

- a) Dacă g este o funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$ este f derivabilă pe $\mathbb{R}$?
- b) Ce condiție suplimentară ar trebui să satisfacă g ca f să fie derivabilă?
- c) Pentru

$$g(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$$

să se traseze graficul funcției f .

Probleme de antrenament - Setul 4

1. Arătați că $1 \cdot 2 \cdot C_n^2 + 2 \cdot 3 \cdot C_n^2 + \dots + (n-1) \cdot n \cdot C_n^n = n \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2}$, $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2$.
2. Calculați $S_n = \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)$ pentru $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$.
3. Demonstrați că $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$, $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 1$.
4. Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right) \cdot x$.
5. Demonstrați că:
 - a) $e^x > \frac{1}{1+x}$, $\forall x > 0$;
 - b) $e^x > 1 + \ln(1+x)$, $\forall x > 0$
 - c) $e^x > 1 + (1+x) \cdot \ln(1+x)$, $\forall x > 0$.
6. Calculați suma $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+3)}$ pentru $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$.