Numele si prenumele	Nr. concurs
Liceul	

Concursul de matematică "Marcel Roşculeţ"

Ediţia a patra, 10 mai 2014

Partea I Subiectele 1-8 au un singur răspuns corect. Răspunsul corect se marchezaă cu X în tabelul primit de dvs.

Subiectul 1.
Dacă $z \in \mathbb{C}$ şi $z + 2\overline{z} = 6 + \mathrm{i}$, atunci
a) $|z| = \sqrt{3}$; **b)** $|z| = \sqrt{5}$; **c)** $|z| = \sqrt{10}$; **d)** $|z| = 10$; **e)** $|z| = 8$; **f)** $|z| = \sqrt{8}$.

Subiectul 2.
Produsul soluţiilor ecuaţei $\sqrt{3x+3} + 4x = 5$ este
a) $\frac{11}{8}$; **b)** $\frac{11}{16}$; **c)** 2; **d)** $\frac{43}{16}$; **e)** 22; **f)** $-\frac{43}{16}$.

Subiectul 3.
Numărul soluţiilor ecuaţei $2^x = x^2$ este
a) 0; **b)** 1; **c)** 4; **d)** 2; **e)** 3; **f)** 5.

Subiectul 4.
Câte perechi de numere reale x şi y verifică relaţia $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$?
a) niciuna; **b)** două; **c)** o infinitate; **d)** trei; **e)** patru; **f)** una.

Subiectul 5.
Calculaţi $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{1-\ln(\mathrm{e}-x)}}$.
a) e; **b)** 1; **c)** $\sqrt{\mathrm{e}}$; **d)** 0; **e)** ∞; **f)** $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Subiectul 6.
Suma modulelor soluţiilor reale ale ecuaţiei $x - x^3 + x^5 - x^7 + ... + x^{101} - x^{103} = 0$ este
a) 0; **b)** 1; **c)** 4; **d)** 103; **e)** 51; **f)** 2.

Subiectul 7.
Determinaţi punctele de întoarcere ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$.
a) $x = 0$; **b)** $x = 2$; **c)** $x = \frac{1}{2}$; **d)** $x \in \emptyset$; **e)** $x = 0$ şi $x = 1$; **f)** $x = 1$.

Subiectul 8.
Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + ax + x^2)}{\sqrt{x+b} - 1} = 2$. Dacă $\lambda = a + b$, atunci
a) $\lambda = 0$; **b)** $\lambda = 3$; **c)** $\lambda = 4$; **d)** $\lambda = -1$; **e)** $\lambda = \frac{1}{2}$; **f)** $\lambda = 2$.

Partea a II-a Se tratează la alegere trei dintre subiectele 9, 10, 11, 12. Soluţiile se redactează pe file diferite. Marcaţi în colţul din dreapta sus al fiecărei foi: numărul subiectului, fila, numărul de concurs.

Subiectul 9.

Fie suma $S_n = 1 + 11 + 111 + \cdots + 1\ldots1$, unde ultimul termen conţine n cifre.

a) Să se calculeze S_n pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Determinacti $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât S_n să de dividă cu 3.

c) Determinacti $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât S_n să de dividă cu 5.

d) Determinacti $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât S_n să de dividă cu 9.

Subiectul 10.

Fie matricele de ordinul doi $A = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

a) Calculaţi A^n şi B^n, pentru $n \in \mathbb{N}$.

b) Studiaţi inversabilitatea matricelor A şi B. Dacă există determinaţi inversa.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} S_k$, unde S_k este suma elementelor matricei $A^{2k+1} + B^{2k+1}$.

Subiectul 11.

Se consideră funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - a^2}$, unde $a \in \mathbb{R}$ iar $D \subset \mathbb{R}$.

a) Dacă D este domeniul maxim de definiţie, studiaţi monotonia funcţiei şi determinaţi asimptotele.

b) Dacă $D = (-a, a)$, $a > 0$, să se arate ca f este inversabilă şi să se calculeze inversa sa f^{-1};

c) Pentru $a > 1$, calculaţi $\displaystyle\int_{-1}^{1} |f(x)| \mathrm{d}x$.

Subiectul 12.

Fie n un număr natural nenul. Notăm $I_p = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^{2p+1} \cos 2n\pi x \mathrm{d}x$ pentru $p \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se determine o relaţie de recurenţă între I_p şi I_{p-1}.

c) Să se calculeze I_{2014}.

Numele şi prenumele .... Liceul	Clasa	Nr. concurs

Concursul de matematică "Marcel Roşculeţ"
Ediţia a V-a, 9 mai 2015

Partea I Subiectele 1-12 au un singur răspuns corect. Răspunsul corect se marchează cu X în tabelul primit de dvs.

Subiectul 1. Dacă $2x - y + z = 0$, $x + y - z = 0$ şi $y \neq 0$, să se calculeze valoarea raportului $\dfrac{x^2 - 2y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$.
a) 2; **b)** 4; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** $-\frac{1}{2}$; **e)** 3; **f)** 0.

Subiectul 2. Câţi termeni raţionali sunt în dezvoltarea $\left(\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{25}$?
a) 6; **b)** 4; **c)** 5; **d)** 24; **e)** nici unul; **f)** 25.

Subiectul 3. Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$ dacă graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2(m+1)x^2 + (m^2 + 2m + 2)x - 2m$, intersectează axa Ox în trei puncte distincte.
a) $m \in (-\infty, -2 - 2\sqrt{2}) \cup (-2 + 2\sqrt{2}, \infty)$; **b)** $m \neq 1$; **c)** $m \in (-2 - 2\sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2})$;
d) $m \in (-\infty, -2 - 2\sqrt{2}) \cup (-2 + 2\sqrt{2}, 1) \cup (1, \infty)$; **e)** nu există m; **f)** $m \neq -2 + 2\sqrt{2}$.

Subiectul 4. Matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ cu $a \in \mathbb{R}$, este inversabilă pentru
a) $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$; **b)** $a \in \{-1, 0\}$; **c)** $a \in \mathbb{R}$; **d)** $a \neq 0$; **e)** $a \neq -1$; **f)** nu există a.

Subiectul 5. Calculaţi $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\pi - 2\operatorname{arctg} x\right)$.
a) 1; **b)** 3; **c)** π; **d)** 2; **e)** $\frac{1}{\pi}$; **f)** $-\pi$.

Subiectul 6. Fie funcţia $f : (0,\ \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 2x}$. Să se calculeze
$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(f^{(k)}(1) - f^{(k+1)}(1)\right)$.
a) $S_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{3^{n+2}}\right)$; **b)** $S_n = -\frac{8}{9} + 2(-1)^n \left(1 - \frac{1}{3^{n+2}}\right)$; **c)** $S_n = 1 - \frac{1}{3^{n+2}}$;
d) $S_n = -\frac{8}{9} + (-1)^n \left(1 - \frac{3}{3^{n+2}}\right)$; **e)** $S_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$; **f)** $S_n = -\frac{8}{9} + (-1)^n (n+1)! \left(1 - \frac{1}{3^{n+2}}\right)$.

Subiectul 7. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 2$ în punctul de abscisă x_0, unde x_0 este soluţie a ecuaţiei $f^{(2)}(x) = 0$.
a) $y = 4x - 9$; **b)** $y = -4x$; **c)** $y = 4x + 13$; **d)** $y = -4x + 11$; **e)** $y = -1$; **f)** $y = -4x + 13$.

Subiectul 8. Fie funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 1}$. Asimptotele funcţiei f sunt:
a) $x = 1$, $y = x$; **b)** $x = 0$, $y = -1$; **c)** $y = x + 1$; **d)** $x = -1$, $y = 2x + 3$;
e) $x = 1$, $y = 1$, $y = -1$; **f)** $x = 1$, $y = 1$.

Subiectul 9. Se consideră $f, g : [1,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$, $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$. Ecuaţia $f(x) = g(x)$ are
a) exact o soluţie; **b)** exact şapte soluţii; **c)** exact trei soluţii; **d)** exact patru soluţii; **e)** exact cinci soluţii; **f)** o infinitate de soluţii.

Subiectul 10. Să se rezolve ecuaţia $|2x-1| + 2|x| = 1$.
a) $x = [-1, 0)$; **b)** $x = 0$; **c)** $x = \frac{1}{2}$; **d)** $x \in \emptyset$; **e)** $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right]$; **f)** $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Subiectul 11. Să se rezolve inecuaţia $\left(\frac{3}{4}\right)^{10-6x-x^3} < \frac{27}{64}$.
a) $x \in (-\infty, -1)$; **b)** $x \in \emptyset$; **c)** $x \in (-1, 1)$; **d)** $x < 1$; **e)** $x > 1$; **f)** $x \in (0, 1)$.

Subiectul 12. Ecuaţia $\log_{2015}(5) + \log_{2015}(x^2+3) = 1$ are aceleaşi soluţii cu
a) $x^2 - 1 = 399$; **b)** $x^2 + 1 = 1$; **c)** $2x^2 = 8$; **d)** $x = 10$; **e)** $x - 20 = 0$; **f)** $x + 20 = 0$.

Partea a II-a Participanţii de clasa a XI-a tratează subiectele 13 şi 14. Participanţii de clasa a XII-a tratează subiectele 15 şi 16.
Soluţiile se redactează pe file diferite pentru fiecare subiect. Marcaţi în colţul din dreapta sus al fiecărei foi: numărul subiectului, fila, numărul de concurs.

Subiectul 13. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$ şi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
a) Să se calculeze A^2 şi A^n, pentru $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.
b) Dacă $a + b + c = 0$ să se calculeze matricea $B(x) = I_3 + xA + x^2A^2 + \cdots + x^{2015}A^{2015}$.
c) Să se arate că $B(x)$ este inversabilă oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi să se determine inversa sa.

Subiectul 14. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$,
a) Să se determine asimptotele, punctele de extrem, intervalele de monotonie, punctele de inflexiune şi intervalele de convexitate/concavitate ale funcţiei f.
b) Să se arate că $f(x) \geq 2x + 1$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.
c) Calculaţi $f^{(k)}(x)$ pentru $k \in \mathbb{N}^*$.
d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{(1)}(0) + f^{(2)}(0) + \cdots + f^{(n)}(0)}{n^2}$.

Subiectul 15. Pentru $a \in \mathbb{R}$ se definesc funcţiile $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_a(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{e}^t \cdot \cos(at)}{1 + \mathrm{e}^t} \mathrm{d}t$.
a) Calculaţi $g_0(x)$.
b) Calculaţi $g_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ pentru $n \in \mathbb{N}^*$.
c) Calculaţi $\lim\limits_{a\to 0} g_a(x)$.

Subiectul 16. Se dă polinomul $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.
a) Calculaţi $(X-1)f$ şi aflaţi toate rădăcinile polinomului f.
b) Să se descompună f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.
c) Aflaţi restul împărţirii lui $f(X^5)$ la $f(X)$.

Numele şi prenumele	Clasa	Nr. concurs
Liceul	....	

Concursul de matematică "Marcel Roşculeţ"

Ediţia a VI-a, 7 mai 2016

Partea I Subiectele 1-12 au un singur răspuns corect. Răspunsul corect se marchează cu X în tabelul primit de dvs.

Subiectul 1. Produsul soluţiilor reale ale ecuaţiei $\log_x^2 6+\log_{\frac{1}{6}}^2 \dfrac{1}{x}+\log_{\frac{1}{\sqrt{(x)}}} \dfrac{1}{6}+\log_6 x^2+\dfrac{3}{4}=0$ este
a) $6^{-\frac{5}{2}}$; **b)** 1; **c)** $6^{-\frac{3}{2}}$; **d)** $6^{\frac{5}{2}}$; **e)** $6^{\frac{3}{2}}$; **f)** 0.

Subiectul 2. Câţi termeni raţionali sunt în dezvoltarea $\left(\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{25}$?
a) 6; **b)** 4; **c)** 5; **d)** 24; **e)** nici unul; **f)** 25.

Subiectul 3. Pentru ce valori ale parametrului $m \in \mathbb{R}$, ecuaţia $2x^2-2(m+4)x+m^2+8m+15$ are doua soluţii în intervalul $[1,\ 3]$?
a) $m \in (-4-\sqrt{2},\ -4+\sqrt{2})$; **b)** $m \in [-4-\sqrt{2},\ -4+\sqrt{2}]$;
c) $m \in \mathbb{R}\backslash(-4-\sqrt{2},\ -4+\sqrt{2})$; **d)** $m \in \mathbb{R}\backslash[-4-\sqrt{2},\ -4+\sqrt{2}]$;
e) toate celelalte variante sunt greşite; **f)** $m \in [4-\sqrt{2},\ 4+\sqrt{2}]$.

Subiectul 4. Numărul punctelor de extrem ale functiei $f:(0,\ \mathrm{e}^2) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x+1)-\sqrt{(x)}$ este
a) 0; **b)** 3; **c)** 1; **d)** 2; **e)** 4; **f)** 5.

Subiectul 5. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\sum\limits_{j=1}^{3}\sqrt[n]{a_j}\right)^n$, unde a_1, a_2, a_3 sunt reale strict pozitive.
a) $3a_1a_2a_3$; **b)** $3(a_1+a_2+a_3)$; **c)** $\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$; **d)** $\dfrac{a_1a_2a_3}{3}$; **e)** $\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$; **f)** $\sqrt[3]{a_1+a_2+a_3}$.

Subiectul 6. Pentru $m \in \mathbb{R}$ se consideră ecuaţia $x^2-|x|-mx(x+1)=0$. Determinaţi $A=\{m \in \mathbb{R} | \text{ecuaţia are 3 soluţii reale}\}$.
a) $A=[-1,\ 1]$; **b)** $A=(-\infty,\ -1)\cup(1,\ \infty)$; **c)** $A=(-\infty,\ -1]\cup[1,\ \infty)$; **d)** $A=(0,\ \infty)$;
e) $A=(0,\ 1)$; **f)** $A=(-1,\ 1)$.

Subiectul 7. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\backslash\{3\} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3x+4}}{x-3}$. Asimptotele funcţiei f sunt:
a) $x=-3$, $y=x$; **b)** $x=3$, $y=-1$; **c)** $x=3, y=x+1$; **d)** $x=3$, $y=2x+3$;
e) $x=3$, $y=1$, $y=-1$; **f)** $x=3$, $y=1$.

Subiectul 8. Fie $f:(-\infty,-1)\cup(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)(x^2+1)}-\operatorname{arctg} x$. In câte puncte de pe graficul funcţiei f, tangeta la graficul lui f este paralelă cu prima bisectoare?
a) 4; **b)** 5; **c)** 3; **d)** 2; **e)** 1; **f)** niciunul.

Subiectul 9. Fie $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\left[\dfrac{3x+1}{2}\right]=\dfrac{x^2+3x+2}{4}\right\}$, unde $[a]$ este partea întreagă a lui a. Aflaţi numărul elementelor muţimii A.
a) 7; **b)** 2; **c)** 3; **d)** 6; **e)** 5; **f)** 4.

Subiectul 10. Fie numerele reale x,y,z, $x>y>z$. Ḑacă $(x-y)(y-z)(x-z)=17$, atunci valoarea minimă a expresiei $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{y-z}+\dfrac{1}{x-z}$ este:
a) $9\cdot 17^{-1}$; **b)** $9\cdot 17^{-1/3}$; **c)** $3\cdot 17^{-1/2}$; **d)** $3\cdot 17^{-1}$; **e)** $3\cdot 17^{-2/3}$; **f)** $3\cdot 17^{-1/3}$.

Subiectul 11. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(2016+x^2)\mathrm{e}^x$. Calculaţi $f^{(2016)}(0)$.
a) 2016^2; **b)** $2015\cdot 2016$; **c)** $2015\cdot 2016-1$; **d)** $2015\cdot 2016+1$; **e)** 2017; **f)** 2016.

Subiectul 12. Valoarea minimă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sum\limits_{i=1}^{12}(x-i)^2$ este:
a) 144; **b)** 288; **c)** 143; **d)** 0; **e)** $\frac{127}{2}$; **f)** $\frac{127}{4}$.

Partea a II-a Participanţii de clasa a XI-a tratează subiectele 13 şi 14. Participanţii de clasa a XII-a tratează subiectele 14 şi 15.
Soluţiile se redactează pe file diferite pentru fiecare subiect. Marcaţi în colţul din dreapta sus al fiecărei foi: numărul subiectului, fila, numărul de concurs.

Subiectul 13. Pentru parametrul $m>1$, fie funcţia $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln|x+1|+(1-m)x^2$. unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei f.
a) Să se studieze existenţa asimptotelor.
b) Să se studieze monotonia funcţiei f.
d) Să se calculeze $\lim\limits_{m\to\infty} x_1x_2\left(f(x_1)+f(x_2)\right)$, unde x_1 şi x_2 sunt abscisele punctelor de maxim ale funcţiei f.

Subiectul 14. Fie $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, nenule, astfel încât $ad=bc$ şi $a\neq -d$. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} a+1 & b\\ c & d+1\end{pmatrix}$.
a) Să se calculeze A^k, pentru $k\in\mathbb{N}, k\geq 1$.
b) Să se calculeze B^n, pentru $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$.
c) Să se studieze convergenţa şirurilor $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$, definite prin $x_1=p$, $y_1=q$ şi $\begin{pmatrix} x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=B\cdot\begin{pmatrix} x_n\\ y_n\end{pmatrix}$ pentru $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$.

Subiectul 15. Fie funcţia $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(a)=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\mathrm{tg}a+1}$, $\forall a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
a) Calculaţi $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
b) Calculaţi $f(a)$ pentru $a\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.
c) Calculaţi $f(a)$ pentru $a\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.
d) Studiaţi continuitatea funcţiei f.

Numele şi prenumele	Clasa	Nr. concurs
Liceul	....	

Concursul de matematică ”Marcel Roşculeţ”

Ediţia a VII-a, 6 mai 2017

Partea I Subiectele 1-12 au un singur răspuns corect. Răspunsul corect se marchează cu X în tabelul primit de dvs.

Subiectul 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ ax^2 + bx, & x \geq 0 \end{cases}$. Atunci f este bijectivă dacă şi numai dacă
a) $b \geq 0, a > 0$ sau $a = 0, b > 0$; **b)** $b < 0, a > 0$ sau $a = 0, b > 0$; **c)** $b \leq 0, a > 0$;
d) $b < 0, a = 0$ sau $a = 0, b > 0$; **e)** $b \leq 0, a > 0$ sau $a = 0, b \geq 0$; **f)** $b < 0, a \geq 0$.

Subiectul 2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - x + a}{x^2 + x + 1}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathrm{Im} f = [\frac{1}{3}, 3]$.
a) $a = 0$; **b)** $a = 2, a = 3$; **c)** $a = 1$; **d)** $a = -1$; **e)** $a = -1, a = 1$; **f)** $a = 2, a = 4$.

Subiectul 3. Pentru ce valori ale parametrului real m, sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = m \end{cases}$ are soluţie reală unică.
a) $m \in \mathbb{R}$; **b)** $m = \frac{1}{2}$; **c)** $m = 0$; **d)** $m = -\frac{1}{2}$; **e)** $m \in \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$; **f)** $m \in (0, \frac{1}{2})$.

Subiectul 4. Soluţiile ecuaţiei $(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}})^x + (\sqrt{5 - 2\sqrt{6}})^x = 10$ sunt
a) $\{\pm 1\}$; **b)** $\{\pm 2\}$; **c)** $\{\pm \sqrt{2}\}$; **d)** $\{\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\}$; **e)** $\{\pm \frac{1}{2}\}$; **f)** $\{\pm 4\}$.

Subiectul 5. Să se rezolve ecuaţia $16^{|x|} - 2 \cdot 4^{|x|} - 8 = 0$.
a) $x \in \{1\backslash 2, -1\backslash 2\}$; **b)** $x \in \{1, -1\}$; **c)** $x \in \{1\backslash 2, 1\}$; **d)** $x = 1$; **e)** $x = 1/2$;
f) $x \in \{-1, -1\backslash 2, 1\backslash 2, 1\}$.

Subiectul 6. Să se calculeze $\left|\dfrac{\alpha + \mathrm{i}}{\alpha - \mathrm{i}}\right|$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$.
a) $\frac{|\alpha|+1}{|\alpha|-1}$; **b)** $2|\alpha|$; **c)** $\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$; **d)** $|\alpha|$; **e)** $\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$; **f)** 1.

Subiectul 7. Pentru câte valori ale lui $m \in \mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} x - my + z = 2 \\ x + y - mz = 2 \\ 2x - y + 3z = 4 \end{cases}$ este compatibil simplu nedeterminat ?
a) o singură valoare; **b)** două valori; **c)** trei valori; **d)** nici o valoare; **e)** patru valori;
f) o infinitate de valori.

Subiectul 8. Să se determine parametrii reali a, b astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^4 + ax + 2, & x < 0 \\ b + \ln(1 + x^4), & x \geq 0 \end{cases}$ să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.
a) $a = 0, b = 2$; **b)** $a = 2, b = 0$; **c)** $a = 1, b = -1$; **d)** $a = -1, b = 1$; **e)** $a = 1, b = 2$;
f) $a = 0, b \in \mathbb{R}$.

Subiectul 9. Dacă z este soluţie a ecuaţiei $|z| + z = 8 + 4\mathrm{i}$, atunci $|z|$ este
a) 8; **b)** 5; **c)** 3; **d)** 4; **e)** 1; **f)** 2.

Subiectul 10. Fie $f(x) = mx - \ln(1 + x^2), \forall m \in \mathbb{R}$, şi $A = \{m \in \mathbb{R} | f \text{ este crescătoare}\}$. Care afirmaţie este adevărată ?
a) $A = (-1, 1)$; **b)** $A = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; **c)** $A = [1, \infty)$; **d)** $A = \emptyset$; **e)** $A = (-\infty, -1)$;
f) $A = (1, \infty,)$.

Subiectul 11. Să se rezolve inecuaţia $\left(\frac{2}{3}\right)^{10-6x-x^3} < \frac{8}{27}$.
a) $x \in (-\infty, -1)$; **b)** $x \in \emptyset$; **c)** $x \in (-1, 1)$; **d)** $x < 1$; **e)** $x > 1$; **f)** $x \in (0, 1)$.

Subiectul 12. Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $\log_{2017}(x - 2\sqrt{2}) + \log_{2017}(x + 2\sqrt{2}) = 1$ este
a) 3; **b)** 4; **c)** 2; **d)** 0; **e)** 1; **f)** o infinitate.

Partea a II-a Participanţii de clasa a XI-a tratează subiectele 13 şi 14. Participanţii de clasa a XII-a tratează subiectele 15 şi 16.
Soluţiile se redactează pe file diferite pentru fiecare subiect. Marcaţi în colţul din dreapta sus al fiecărei foi: numărul subiectului, fila, numărul de concurs.

Subiectul 13. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ -2 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$.
a) Să se determine toate matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care au proprietatea $XA = AX$.
b) Să se rezolve ecuaţia $X^2 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Subiectul 14. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(1 - x \ln x)$.
a) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.
b) Să se determine numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $f(x) = 0$.
c) Să se demonstreze că $f(x) > 0, \forall x \in (0, 1)$, şi $f(x) < 0, \forall x \in (\mathrm{e}, \infty)$.

Subiectul 15. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \int\limits_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t$.
a) Să se arate că $f(1) > 2 - \mathrm{e}$.
b) Să se studieze monotonia funcţiei f.
c) Să se arate că f este funcţie nemărginită.

Subiectul 16. Se dă polinomul $P = X^n - (X^{n-1} + X^{n-2} + ... + X + 2)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
a) Arătaţi că P se divide cu $X - 2$.
b) Pentru $n = 2017$ aflaţi rădăcinile polinomului P.
c) Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, calculaţi suma rădăcinilor nereale ale polinomului P.

Numele şi prenumele	Clasa	Nr. concurs
Liceul	....	

Concursul de matematică ”Marcel Roşculeţ”

Ediţia a VIII-a, 12 mai 2018

Partea I Subiectele 1-12 au un singur răspuns corect.
Răspunsul corect se marchează cu X în tabelul primit.

Subiectul 1. Produsul soluţiilor reale ale ecuaţiei $5\sqrt[3]{5x-2} = x^3 + 2$ este
a) 2; **b)** 4; **c)** -2; **d)** 1; **e)** -1; **f)** $2\sqrt{2}$.

Subiectul 2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ atunci
a) $f''(0) = -\frac{1}{3}$; **b)** f nu este derivabilă; **c)** $f'(0) = -\frac{1}{2}$; **d)** $f''(0) = 0$; **e)** $f'(\pi) = \pi$; **f)** $f''(0) = \frac{1}{2}$.

Subiectul 3. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} + \ln x$. Atunci
a) $(f^{-1})'(1) = 1$; **b)** f nu este derivabilă; **c)** $(f^{-1})'(1) = \frac{2}{3}$; **d)** f nu este inversabilă;
e) f are un punct de extrem local; **f)** f are un punct de inflexiune.

Subiectul 4. Fie $f : (-\infty, -1) \cup [1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$. Atunci
a) f nu are asimptote verticale; **b)** $y = x$ este asimptotă la ∞; **c)** $y = x+1$ este asimptotă la $-\infty$;
d) $y = -x$ este asimptotă la $-\infty$; **e)** f nu are asimptote oblice; **f)** $y = x-1$ este asimptotă la $-\infty$.

Subiectul 5. Fie S mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\left[\dfrac{x-1}{2}\right] = 2x - 3$. Atunci
a) $S \subset \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) \cap \mathbb{Q}$; **b)** S are două elemente; **c)** $S = \emptyset$; **d)** S are un element; **e)** S are trei elemente;
f) S are o infinitate de elemente.

Subiectul 6. Fie ecuaţia $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7+6\sqrt{x-2}} = 1$ şi S mulţimea soluţiilor ecuaţiei. Atunci
a) S are patru elemente; **b)** S are un element; **c)** S are două elemente; **d)** S are trei elemente;
e) $S = \emptyset$; **f)** $S \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

Subiectul 7. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + ax - 1$ şi $A = \{a \in \mathbb{R} | f \text{ este bijectivă}\}$. Atunci
a) $A = \mathbb{R}$; **b)** $A = [0, \infty)$; **c)** $[-1, 1] \subset A$; **d)** $A = \emptyset$; **e)** $A \subset [-1, 1]$; **f)** A nu conţine numere iraţionale.

Subiectul 8. Dacă a şi b sunt nenule şi $\left(\dfrac{1}{125}\right)^{a^2+4ab} = \left(\sqrt[3]{625}\right)^{3a^2-10ab}$, atunci $\dfrac{a}{b}$ este
a) $\frac{21}{76}$; **b)** $\frac{76}{3}$; **c)** $\frac{76}{21}$; **d)** 4; **e)** 2; **f)** $\frac{4}{21}$.

Subiectul 9. Exprimaţi $\log_{a^2} \sqrt[3]{b^5 c^4}$ în funcţie de x şi y, ştiind că $\log_b a = x$ şi $\log_b c = y$.
a) $\dfrac{5+4y}{6x}$; **b)** $\dfrac{5+y^4}{x}$; **c)** $2x + 4y$; **d)** $\dfrac{5+4y}{3x}$; **e)** $\dfrac{5+y^4}{3x}$; **f)** $\dfrac{5+4y}{6}$.

Subiectul 10. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $|x-1|\cdot|x-3|<1$ este
a) $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$; **b)** $[2-\sqrt{2},2)\cup(2,2+\sqrt{2}]$; **c)** $(2+\sqrt{2},\infty)$; **d)** $(2-\sqrt{2},2)\cup(2,2+\sqrt{2})$;
e) $(0,\infty)$; **f)** $[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}]$.

Subiectul 11. Fie $z=\sum\limits_{k=0}^{1009}(-1)^k 2^{k+1}\mathrm{C}_{2018}^{2k}$. Atunci
a) $z=(1+\sqrt{2})^{2018}+(1-\sqrt{2})^{2018}$; **b)** $z=(1+\mathrm{i}\sqrt{2})^{2018}+(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^{2018}$;
c) $z=(\sqrt{2}+\mathrm{i})^{2018}+(\sqrt{2}-\mathrm{i})^{2018}$; **d)** $z=(2+\sqrt{2})^{2018}+(2-\sqrt{2})^{2018}$;
e) $z=(2+\mathrm{i}\sqrt{2})^{2018}+(2-\mathrm{i}\sqrt{2})^{2018}$; **f)** $z=(2\sqrt{2}+\mathrm{i})^{2018}+(2\sqrt{2}-\mathrm{i})^{2018}$.

Subiectul 12. Fie S mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sum\limits_{k=1}^{2018}\dfrac{1}{\log_{x+k}2018!}=1$.
a) S are două elemente; **b)** S are trei elemente; **c)** S are un element; **d)** $S\subset(1,3)$; **e)** $S\backslash\mathbb{N}\neq\emptyset$;
f) $S\backslash\mathbb{Q}\neq\emptyset$.

Partea a II-a
Participanţii de clasa a XI-a tratează subiectele 13 şi 14.
Participanţii de clasa a XII-a tratează subiectele 15 şi 16.
Soluţiile se redactează pe file diferite pentru fiecare subiect. Marcaţi în colţul din dreapta sus al fiecărei foi: numărul subiectului, fila, numărul de concurs.

Subiectul 13. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ şi $S(a,b)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\right\}$.
a) Să se determine $S(0,0)$.
b) Să se determine $S(a,b)$.
c) Fie $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ astfel încât $S(a,b)\neq\emptyset$. Să se demonstreze că $ax+by=0$, $\forall(x,y)\in S(0,0)$.

Subiectul 14. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1+x^2)\mathrm{e}^{-|x-1|}$.
a) Să se studieze derivabilitatea funcţiei f şi să se calculeze $f'(x)$.
b) Să se determine punctele de extrem şi punctele de inflexiune ale funcţiei f.
c) Să se discute ecuaţia $1+x^2=m\mathrm{e}^{|x-1|}$.

Subiectul 15. Fie $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{\{t\}^2+1}\mathrm{d}t, \forall x\in\mathbb{R}$ (unde $\{t\}$ este partea fracţionară a lui t).
a) Să se calculeze $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ şi $f\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
b) Să se deducă o formulă explicită pentru $f(x)$.
c) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f.

Subiectul 16. Fie $P=X^4+4X^3-34X^2+mX+105$.
a) Să se determine polinomul Q care are ca rădăcini inversele rădăcinilor lui P.
b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că rădăcinile lui P sunt în progresie aritmetică.
c) În ipoteza de la punctul **b)** să se afle rădăcinile polinomului P.

Numele şi prenumele	Clasa	Nr. concurs
Liceul	**XI**	

Concursul de matematică ”Marcel Roşculeţ”
Ediţia a IX-a, 11 mai 2019

**Partea I Subiectele 1-12 au un singur răspuns corect.
Răspunsul corect se marchează cu X în tabelul primit.**

Subiectul 1. Suma modulelor soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt{x+8}=3$ este :
a) 36; **b)** 25; **c)** $12\sqrt{5}$; **d)** 50; **e)** 1; **f)** $20\sqrt{6}$.

Subiectul 2. Fie $S=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$. Atunci
a) $S^3-6S+20=0$; **b)** $S\notin\mathbb{Q}$; **c)** $S\in\mathbb{N}$; **d)** $S^3-S-30=0$; **e)** $S\in(1,\sqrt{3})$; **f)** $S\in(\sqrt{3},2)$.

Subiectul 3. Dacă S este suma inverselor soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$(\log_x 6)^2+\left(\log_{\frac{1}{6}}\frac{1}{x}\right)^2+\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}}\frac{1}{6}+\log_{\sqrt{6}}x+\frac{3}{4}=0, \text{ atunci}$$

a) $S\in(1,2)$; **b)** $S\in(10,12)$; **c)** $S\in(6,7)$; **d)** $S\in(40,42)$; **e)** $S\in(38,39)$; **f)** $S\in(20,22)$.

Subiectul 4. Fie $A=\left\{z\in\mathbb{C};\left|\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right|=1, z\neq \mathrm{i}\right\}$. Atunci
a) $A=\mathbb{Q}$; **b)** $A=\emptyset$; **c)** $A=\{z\in\mathbb{C};|z|=1,z\neq\mathrm{i}\}$; **d)** $A=\{0,1\}$; **e)** $A=\mathbb{N}$; **f)** $A=\mathbb{R}$.

Subiectul 5. Fie funcţia $f:[0,1]\cup(2,3]\to[0,2]$, $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1] \\ x-1, & x\in(2,3]\end{cases}$.
Care dintre următoarele afirmaţii este cea adevărată ?
a) f nu este continuă; **b)** f^{-1} nu este continuă; **c)** f nu este bijectivă; **d)** f nu este derivabilă; **e)** f^{-1} este derivabilă; **f)** $(f^{-1})'(1)=1$.

Subiectul 6. Pentru $m\in\mathbb{R}^*$, se consideră ecuaţia $|x|x+x-m=0$. Soluţiile ecuaţiei sunt :
a) $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4|m|}}{2}$; **b)** $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4|m|}}{2}$; **c)** $x_{1,2}=\pm\frac{1+\sqrt{1+4|m|}}{2}$; **d)** $x=m$;
e) $x_{1,2}=\pm\frac{1-\sqrt{1+4|m|}}{2}$; **f)** $x=\frac{-1+\sqrt{1+4|m|}}{2}$ dacă $m>0$ sau $x=\frac{1-\sqrt{1+4|m|}}{2}$ dacă $m<0$.

Subiectul 7. Pentru $a\in\mathbb{R}$, fie matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ x & 1 & x \\ -1 & 1 & a\end{pmatrix}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Dacă $M=\{a\in\mathbb{R}; A(x)$ inversabilă pentru orice $x\in\mathbb{R}\}$, atunci
a) $M=(1,\infty)$; **b)** $M=(-\infty,0)$; **c)** $M=\emptyset$; **d)** $M=\mathbb{R}$; **e)** $M=(2,\infty)$; **f)** $M=\mathbb{R}^*$.

Subiectul 8. Valoarea minimă a funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$ este
a) $\frac{1}{\mathrm{e}}$; **b)** $-\mathrm{e}$; **c)** e; **d)** $-\frac{1}{\mathrm{e}}$; **e)** -1; **f)** 0.

Subiectul 9. Produsul soluţiilor ecuaţiei $5^{2x}-4\cdot5^{x+1}-125=0$ este:
a) -1; **b)** -2; **c)** 1; **d)** 5; **e)** 2; **f)** 0.

Subiectul 10. Câte numere naturale verifică inecuaţia $x - 1 \leq \frac{2}{x}$?
a) unul; **b)** două; **c)** o infinitate; **d)** trei; **e)** niciunul; **f)** patru.

Subiectul 11. Câte numere naturale cu patru cifre distincte se pot forma cu cifrele din mulţimea $\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$?
a) 300; **b)** $A_5^4 - A_4^3$; **c)** A_6^4; **d)** C_6^4; **e)** 600; **f)** $C_6^4 - C_5^3$.

Subiectul 12. Fie funcţia $f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$. Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
a) Ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abscisă $x = 2$ este $y = x$;
b) Graficul lui f admite o asimptotă oblică; **c)** Funcţia f are două extreme locale;
d) Funcţia f are un punct de minim local; **e)** Funcţia f are două puncte critice; **f)** $f'(1) = 0$.

Partea a II-a Participanţii de clasa a XI-a tratează subiectele 13 şi 14. Soluţiile se redactează pe file diferite pentru fiecare subiect. Marcaţi în colţul din dreapta sus al fiecărei foi: numărul subiectului, fila, numărul de concurs.

Subiectul 13. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 1|\mathrm{e}^{-|x|}, \forall x \in \mathbb{R}$.
a) Să se determine punctele de extrem ale funcţiei f.
b) Să se demonstreze că funcţia $g : [-1, 0] \to [0, 1]$, $g(x) = |x^2 - 1|\mathrm{e}^{-|x|}, \forall x \in [-1, 0]$, **este inversabilă.**
c) Să se calculeze $(g^{-1})'\left(\frac{3}{4\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$.

Subiectul 14. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
a) Calculaţi $A^2 - 5I_2$ **şi** $\det A$.
b) Calculaţi A^n, **pentru** $n \in \mathbb{N}^*$.
c) Calculaţi $A^{n+2} - 6A^n$, **pentru** $n \in \mathbb{N}^*$.

Numele şi prenumele	Clasa	Nr. concurs
Liceul	**XII**	

Concursul de matematică "Marcel Roşculeţ"

Ediţia a IX-a, 11 mai 2019

Partea I Subiectele 1-12 au un singur răspuns corect.
Răspunsul corect se marchează cu X în tabelul primit.

Subiectul 1. Suma modulelor soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt{x+8}=3$ este :
a) 36; **b)** 25; **c)** $12\sqrt{5}$; **d)** 50; **e)** 1; **f)** $20\sqrt{6}$.

Subiectul 2. Fie $S=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$. Atunci
a) $S^3-6S+20=0$; **b)** $S\notin\mathbb{Q}$; **c)** $S\in\mathbb{N}$; **d)** $S^3-S-30=0$; **e)** $S\in(1,\sqrt{3})$; **f)** $S\in(\sqrt{3},2)$.

Subiectul 3. Dacă S este suma inverselor soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$(\log_x 6)^2+\left(\log_{\frac{1}{6}}\frac{1}{x}\right)^2+\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}}\frac{1}{6}+\log_{\sqrt{6}}x+\frac{3}{4}=0,\ \text{atunci}$$

a) $S\in(1,2)$; **b)** $S\in(10,12)$; **c)** $S\in(6,7)$; **d)** $S\in(40,42)$; **e)** $S\in(38,39)$; **f)** $S\in(20,22)$.

Subiectul 4. Fie $A=\left\{z\in\mathbb{C};\left|\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right|=1, z\neq\mathrm{i}\right\}$. Atunci
a) $A=\mathbb{Q}$; **b)** $A=\emptyset$; **c)** $A=\{z\in\mathbb{C};|z|=1,z\neq\mathrm{i}\}$; **d)** $A=\{0,1\}$; **e)** $A=\mathbb{N}$; **f)** $A=\mathbb{R}$.

Subiectul 5. Fie funcţia $f:[0,1]\cup(2,3]\to[0,2]$, $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1] \\ x-1, & x\in(2,3]\end{cases}$.
Care dintre următoarele afirmaţii este cea adevărată ?
a) f nu este continuă; **b)** f^{-1} nu este continuă; **c)** f nu este bijectivă; **d)** f nu este derivabilă; **e)** f^{-1} este derivabilă; **f)** $(f^{-1})'(1)=1$.

Subiectul 6. Pentru $m\in\mathbb{R}^*$, se consideră ecuaţia $|x|x+x-m=0$. Soluţiile ecuaţiei sunt :
a) $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4|m|}}{2}$; **b)** $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4|m|}}{2}$; **c)** $x_{1,2}=\pm\frac{1+\sqrt{1+4|m|}}{2}$; **d)** $x=m$;
e) $x_{1,2}=\pm\frac{1-\sqrt{1+4|m|}}{2}$; **f)** $x=\frac{-1+\sqrt{1+4|m|}}{2}$ dacă $m>0$ sau $x=\frac{1-\sqrt{1+4|m|}}{2}$ dacă $m<0$.

Subiectul 7. Pentru $a\in\mathbb{R}$, fie matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ x & 1 & x \\ -1 & 1 & a\end{pmatrix}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Dacă $M=\{a\in\mathbb{R}; A(x)$ inversabilă pentru orice $x\in\mathbb{R}\}$, atunci
a) $M=(1,\infty)$; **b)** $M=(-\infty,0)$; **c)** $M=\emptyset$; **d)** $M=\mathbb{R}$; **e)** $M=(2,\infty)$; **f)** $M=\mathbb{R}^*$.

Subiectul 8. Valoarea minimă a funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$ este
a) $\frac{1}{\mathrm{e}}$; **b)** $-\mathrm{e}$; **c)** e; **d)** $-\frac{1}{\mathrm{e}}$; **e)** -1; **f)** 0.

Subiectul 9. Produsul soluţiilor ecuaţiei $5^{2x}-4\cdot5^{x+1}-125=0$ este:
a) -1; **b)** -2; **c)** 1; **d)** 5; **e)** 2; **f)** 0.

Subiectul 10. Câte numere naturale verifică inecuaţia $x-1 \leq \frac{2}{x}$?
a) unul; **b)** două; **c)** o infinitate; **d)** trei; **e)** niciunul; **f)** patru.

Subiectul 11. Fie $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $P = X^4 - 4X^3 + 14X^2 + mX + n$ să aibă rădăcina dublă $1 - 2\mathrm{i}$. Atunci
a) $m+n=5$; **b)** $m+n=0$; **c)** $m-n=0$; **d)** $m-n=10$; **e)** $m-n=4$; **f)** $m+n=8$.

Subiectul 12. Valoarea integralei $I = \int_1^{\mathrm{e}} \cos(\ln x)\mathrm{d}x$ este:
a) $2\left((\sin 1 + \cos 1)\mathrm{e} - 1\right)$; **b)** ;$\frac{1}{2}\left((\sin 1 + \cos 1)\pi - 1\right)$ **c)** $\frac{1}{2}\left(2(\sin 1 + \cos 1) - \mathrm{e}\right)$;
d) $\frac{1}{2}\left((\sin 1 + \cos 1)\mathrm{e} - 1\right)$; **e)** $2\left((\sin 1 + \cos 1)\pi - \mathrm{e}\right)$; **f)** $2\left((\sin 1 + \cos 1)\pi + \mathrm{e}\right)$.

Partea a II-a Participanţii de clasa a XII-a tratează subiectele 15 şi 16. Soluţiile se redactează pe file diferite pentru fiecare subiect. Marcaţi în colţul din dreapta sus al fiecărei foi: numărul subiectului, fila, numărul de concurs.

Subiectul 15. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}, \forall x \in \mathbb{R}$.
a) Să se studieze monotonia funcţiei f.
b) Să se studieze semnul funcţiei f.
c) Să se demonstreze că $\lim\limits_{\varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1 - \cos x}{x}\mathrm{d}x \geq 0,23$.

Subiectul 16. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte operaţia $x * y = xy - 7x - 7y + 56$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
a) Fie $G = (7, \infty)$. Să se demonstreze că $(G, *)$ este grup abelian.
b) Să se demonstreze că grupul $(G, *)$ este izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive.
c) Să se rezolve ecuaţia $(7 + 2011!) * x = 8 * 9 * 10 * ... * 2019$, $x > 7$.

Clasa a XI-a	

Concursul de matematică "Marcel Roşculeţ"

Ediţia a X-a, 13 mai 2023

Partea I Subiectele 1-15 au un singur răspuns corect.
În tabelul primit se marchează cu X răspunsul corect şi cu — celelalte răspunsuri.

Subiectul 1. Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $9^{x+1} - 3^{x-1} = 0$ este
a) 2; **b)** 1; **c)** 4; **d)** 3; **e)** 5; **f)** 0.

Subiectul 2. Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{5x-1} - 2x + 1 = 0$ este
a) $\left\{2, \frac{1}{4}\right\}$; **b)** $\left\{-2, -\frac{1}{4}\right\}$; **c)** $\left\{-2, \frac{1}{4}\right\}$; **d)** $\{2\}$; **e)** $\left\{2, -\frac{1}{4}\right\}$; **f)** $\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

Subiectul 3. Fie α o soluţie a ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix}$.
Calculaţi suma elementelor matricei A^4.
a) 3; **b)** 18; **c)** 9; **d)** 81; **e)** 27; **f)** 6.

Subiectul 4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Determinaţi funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $(g \circ f)(x) = 2x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
a) $g(x) = -2x + 3$; **b)** $g(x) = 2x - 3$; **c)** $g(x) = 3x - 2$; **d)** $g(x) = -3x - 2$; **e)** $g(x) = 2x + 1$; **f)** $g(x) = 2x - 1$.

Subiectul 5. Să se calculeze $x = \lg^2 2 + \lg^2 5 + \lg 40 + 2 \cdot \lg 5 \cdot \lg 20$.
a) $x = 1$; **b)** $x = 4$; **c)** $x = -1$; **d)** $x = 16$; **e)** $x = 8$; **f)** $x = 2$.

Subiectul 6. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică şi fie m, k, p numere naturale nenule, distincte două câte două. Ştiind că $a_m = k$ şi $a_k = m$, să se calculeze a_p.
a) $a_p = m + k - 2p$; **b)** $a_p = m + k + 2p$; **c)** $a_p = m + k - p$; **d)** $a_p = 2(m + k) - p$; **e)** $a_p = 2(m + k) + p$; **f)** $a_p = m + k + p$.

Subiectul 7. Dacă $S = \sum_{k=1}^{2023} (-1)^{k-1} \cdot k \cdot C_{2023}^{k}$, atunci
a) $S = 0$; **b)** $S = 1$; **c)** $S = 2023$; **d)** $S = 2$; **e)** $S = 2022$; **f)** $S = 3$.

Subiectul 8. Fie $f : (-\infty, -1) \cup [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. Să se determine asimptota oblică la $-\infty$.
a) $y = x + 1$; **b)** $y = -x - 1$; **c)** $y = x$; **d)** $y = x - 1$; **e)** $y = -x + 1$; **f)** $y = -x$.

Subiectul 9. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.
Care dintre următoarele afirmaţii este cea adevărată ?
a) $f''(0) = -\frac{1}{3}$; **b)** f nu este derivabilă pe $\mathbb{R}$; **c)** f nu este continuă pe $\mathbb{R}$; **d)** $f'(\pi) = \frac{1}{\pi}$; **e)** $f'(0) = 1$; **f)** f' nu este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Subiectul 10. Câte soluţii are ecuaţia $|\cos x| e^x = 1$ în intervalul $(-1, 5)$?
a) 1; **b)** 3; **c)** 4; **d)** 2; **e)** o infinitate de soluţii; **f)** 5.

Subiectul 11. Determinaţi mulţimea valorilor lui a, $a \in \mathbb{R}$, astfel încât sistemul $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+ay+2z=a \\ x+a^2y+4z=a^2 \end{cases}$ să fie compatibil.
a) $\mathbb{R}\backslash\{1,2\}$; **b)** $\{1,2\}$; **c)** $\mathbb{R}\backslash\{1\}$; **d)** $\mathbb{R}$; **e)** $\mathbb{R}\backslash\{2\}$; **f)** $\emptyset$.

Subiectul 12. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\mathrm{e}^x+x-1$ şi fie f^{-1} inversa ei. Calculaţi $(f^{-1})'(0)$.
a) $-\dfrac{1}{2}$; **b)** 1; **c)** e; **d)** $\mathrm{e}+1$; **e)** -1; **f)** $\dfrac{1}{2}$.

Subiectul 13. Determinaţi valoarea minimă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{20}(x-n)^2$.
a) 670; **b)** 450; **c)** 710; **d)** 635; **e)** 665; **f)** 790.

Subiectul 14. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$. Calculaţi $\sum\limits_{k=1}^{3}\left(f^{(k)}(1)-f^{(k+1)}(1)\right)$.
a) $-\frac{5}{2}$; **b)** $\frac{39}{8}$; **c)** $-\frac{39}{8}$; **d)** -24; **e)** -48; **f)** 24.

Subiectul 15. Fie $a\in\mathbb{R}$ şi $f:\mathbb{R}\backslash\{a\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{x-a}$. Să se determine valorile lui a pentru care f admite două puncte de extrem.
a) $a=1$; **b)** $a\in[1,\infty)$; **c)** $a\in(-\infty,1]$; **d)** $a\in[0,1]$; **e)** $a\in\mathbb{R}$; **f)** $a=0$.

Partea a II-a Participanţii de clasa a XI-a tratează subiectul 16. Participanţii de clasa a XII-a tratează subiectul 17.

Subiectul 16. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x|\ln(1+|x|), \forall x\in\mathbb{R}$.
a) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f.
b) Să se studieze monotonia funcţiei f.
c) Să se determine numărul punctelor de pe graficul funcţiei f în care tangenta la grafic este paralelă cu prima bisectoare.

Subiectul 17. Fie $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}, f(t)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2-2(\cos t)x+1}\,\mathrm{d}x$.
a) Să se calculeze $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.
b) Să se determine imaginea funcţiei f.
c) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât suma soluţiilor ecuaţiei $f(t)=a$ să fie egală cu π.

Clasa a XII-a	

Concursul de matematică ”Marcel Roşculeţ”

Ediţia a X-a, 13 mai 2023

Partea I Subiectele 1-15 au un singur răspuns corect.
În tabelul primit se marchează cu X răspunsul corect şi cu — celelalte răspunsuri.

Subiectul 1. Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $9^{x+1} - 3^{x-1} = 0$ este
a) 2; **b)** 1; **c)** 4; **d)** 3; **e)** 5; **f)** 0.

Subiectul 2. Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{5x-1} - 2x + 1 = 0$ este
a) $\left\{2, \frac{1}{4}\right\}$; **b)** $\left\{-2, -\frac{1}{4}\right\}$; **c)** $\left\{-2, \frac{1}{4}\right\}$; **d)** $\{2\}$; **e)** $\left\{2, -\frac{1}{4}\right\}$; **f)** $\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

Subiectul 3. Fie α o soluţie a ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix}$.
Calculaţi suma elementelor matricei A^4.
a) 3; **b)** 18; **c)** 9; **d)** 81; **e)** 27; **f)** 6.

Subiectul 4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Determinaţi funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $(g \circ f)(x) = 2x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
a) $g(x) = -2x + 3$; **b)** $g(x) = 2x - 3$; **c)** $g(x) = 3x - 2$; **d)** $g(x) = -3x - 2$; **e)** $g(x) = 2x + 1$; **f)** $g(x) = 2x - 1$.

Subiectul 5. Să se calculeze $x = \lg^2 2 + \lg^2 5 + \lg 40 + 2 \cdot \lg 5 \cdot \lg 20$.
a) $x = 1$; **b)** $x = 4$; **c)** $x = -1$; **d)** $x = 16$; **e)** $x = 8$; **f)** $x = 2$.

Subiectul 6. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică şi fie m, k, p numere naturale nenule, distincte două câte două. Ştiind că $a_m = k$ şi $a_k = m$, să se calculeze a_p.
a) $a_p = m + k - 2p$; **b)** $a_p = m + k + 2p$; **c)** $a_p = m + k - p$; **d)** $a_p = 2(m + k) - p$;
e) $a_p = 2(m + k) + p$; **f)** $a_p = m + k + p$.

Subiectul 7. Dacă $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{2023} (-1)^{k-1} \cdot k \cdot C_{2023}^k$, atunci
a) $S = 0$; **b)** $S = 1$; **c)** $S = 2023$; **d)** $S = 2$; **e)** $S = 2022$; **f)** $S = 3$.

Subiectul 8. Fie $f : (-\infty, -1) \cup [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$. Să se determine asimptota oblică la $-\infty$.
a) $y = x + 1$; **b)** $y = -x - 1$; **c)** $y = x$; **d)** $y = x - 1$; **e)** $y = -x + 1$; **f)** $y = -x$.

Subiectul 9. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.
Care dintre următoarele afirmaţii este cea adevărată ?
a) $f''(0) = -\dfrac{1}{3}$; **b)** f nu este derivabilă pe $\mathbb{R}$; **c)** f nu este continuă pe $\mathbb{R}$; **d)** $f'(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$;
e) $f'(0) = 1$; **f)** f' nu este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Subiectul 10. Câte soluţii are ecuaţia $|\cos x| e^x = 1$ în intervalul $(-1, 5)$?
a) 1; **b)** 3; **c)** 4; **d)** 2; **e)** o infinitate de soluţii; **f)** 5.

Subiectul 11. Determinaţi mulţimea valorilor lui a, $a \in \mathbb{R}$, astfel încât sistemul $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+ay+2z=a \\ x+a^2y+4z=a^2 \end{cases}$ să fie compatibil.
a) $\mathbb{R}\backslash\{1,2\}$; **b)** $\{1,2\}$; **c)** $\mathbb{R}\backslash\{1\}$; **d)** $\mathbb{R}$; **e)** $\mathbb{R}\backslash\{2\}$; **f)** $\emptyset$.

Subiectul 12. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\mathrm{e}^x+x-1$ şi fie f^{-1} inversa ei. Calculaţi $(f^{-1})'(0)$.
a) $-\frac{1}{2}$; **b)** 1; **c)** e; **d)** $\mathrm{e}+1$; **e)** -1; **f)** $\frac{1}{2}$.

Subiectul 13 Calculaţi $I=\int_0^1 \frac{x^2-x-7}{x^2-3x-4}\mathrm{d}x$.
a) $I=1+\ln\frac{8}{3}$; **b)** $I=1+\ln\frac{3}{2}$; **c)** $I=1+\ln 3$; **d)** $I=-1+\ln\frac{3}{2}$; **e)** $I=1+\ln\frac{2}{3}$; **f)** $I=-1+\ln\frac{8}{3}$.

Subiectul 14 Fie α partea reală a unei rădăcini complexe a polinomului $f=X^3-2X^2+7X-20$. Atunci
a) $\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)$; **b)** $\alpha\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$; **c)** $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$; **d)** $\alpha\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$; **e)** $\alpha\in(1,5)$; **f)** $\alpha\in(-5,-1)$.

Subiectul 15 Fie $f\in\mathbb{Z}_6[X]$, $f=(X-\hat{1})(X-\hat{2})$ şi fie S suma rădăcinilor lui f. Atunci
a) $S=\hat{2}$; **b)** $S=\hat{4}$; **c)** $S=\hat{1}$; **d)** $S=\hat{3}$; **e)** $S=\hat{0}$; **f)** $S=\hat{5}$.

Partea a II-a Participanţii de clasa a XI-a tratează subiectul 16. Participanţii de clasa a XII-a tratează subiectul 17.

Subiectul 16. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x|\ln(1+|x|), \forall x\in\mathbb{R}$.
a) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f.
b) Să se studieze monotonia funcţiei f.
c) Să se determine numărul punctelor de pe graficul funcţiei f în care tangenta la grafic este paralelă cu prima bisectoare.

Subiectul 17. Fie $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}, f(t)=\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-2(\cos t)x+1}\,\mathrm{d}x$.
a) Să se calculeze $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
b) Să se determine imaginea funcţiei f.
c) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât suma soluţiilor ecuaţiei $f(t)=a$ să fie egală cu π.

Clasa	a XI-a

Concursul de matematică ”Marcel Roşculeţ”

Ediţia a XI-a, 18 mai 2024

Partea I   Subiectele 1-15 au un singur răspuns corect.
În tabelul primit se marchează cu X răspunsul considerat corect şi cu — celelalte răspunsuri.

Subiectul 1. Soluţiile ecuaţiei $2^{3x}+6=3\cdot 2^{2x}+2^{x+1}$ sunt
a) $\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$; **b)** $\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\}$; **c)** $\{\log_2 3,\log_2 4\}$; **d)** $\{-1,1\}$; **e)** $\{1,2\}$; **f)** $\left\{\frac{1}{2},\log_2 3\right\}$.

Subiectul 2. Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Aflaţi toate matricele $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), B\neq 0_2$, astfel încât $A\cdot B=0_2$.
a) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix}, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$; **b)** $\begin{pmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix}, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$; **c)** $\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;
d) $\begin{pmatrix} -2\alpha & -2\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \alpha^2+\beta^2>0$; **e)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; **f)** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Subiectul 3. Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $f=\dfrac{x^2-9}{x-4}$, unde $D\subset\mathbb{R}$ este domeniul maxim de definiţie. Asimptotele funcţiei f sunt
a) $y=1$ spre $\pm\infty$ şi $x=4$; **b)** $y=x+4$ spre $\pm\infty$ şi $x=4$; **c)** $y=x$ spre ∞ şi $x=4$;
d) $y=x-4$ spre ∞ şi $x=4$; **e)** $y=x-4$ spre $\pm\infty$ şi $x=4$; **f)** $y=x+4$ spre $\pm\infty$ şi $x=\pm 2$.

Subiectul 4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x+3)^5$. Atunci $f^{(4)}(3)$ este
a) $5!$; **b)** 12; **c)** $4!$; **d)** 6^{20}; **e)** $6!$; **f)** 6^5.

Subiectul 5. Aflaţi $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât mulţimea valorilor funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x+1}{x^2+x+1}$, să fie un interval de lungime 4.
a) $\alpha\in\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\}$; **b)** $\alpha\in\{-1,2\}$; **c)** $\alpha\in[-2,2]$; **d)** $\alpha=4$; **e)** $\alpha\in\left\{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\}$; **f)** $\alpha\in\{-2,4\}$.

Subiectul 6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=ax^2+bx+c$, $\forall x\in\mathbb{R}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.
Dacă $f(k)=\dfrac{1}{k}, \forall k=\overline{1,3}$, calculaţi $f(4)$.
a) 0; **b)** $\dfrac{1}{2}$; **c)** $\dfrac{2}{5}$; **d)** $\dfrac{1}{4}$; **e)** $\dfrac{1}{6}$; **f)** $-\dfrac{1}{6}$.

Subiectul 7. Calculaţi $\left(\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
a) $\frac{1}{2}$; **b)** $-\frac{1}{2}$; **c)** 1; **d)** 2; **e)** 4; **f)** -2.

Subiectul 8. Se consideră ecuaţia $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=m$, unde $m\in\mathbb{R}$. Mulţimea M a valorilor lui m pentru care ecuaţia are soluţie unică $x\in\mathbb{R}$ este
a) $(-\infty,2)$; **b)** $(1,\infty)$; **c)** $(2,\infty)$; **d)** $[2,\infty)$; **e)** $(-\infty,2]$; **f)** $\{2\}$.

Subiectul 9. Se consideră suma $S_n=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, unde n este număr natural, $n\geq 1$. Să se determine cel mai mic n pentru care $S_n\geq 100$.
a) 10201; **b)** 100; **c)** 1000; **d)** 10200; **e)** 101; **f)** 1001.

Subiectul 10. Fie $x, y, z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|x| = |y| = |z|$ şi $xyz = xy + yz + zx = 1$. Valoarea sumei $x + y + z$ este:
a) -1; **b)** 0; **c)** 1; **d)** i; **e)** $-\mathrm{i}$; **f)** 2.

Subiectul 11. Dacă $3^x = 7^y = 441$, atunci $S = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ este
a) $\dfrac{1}{\log_3 21} + \dfrac{1}{\log_7 21}$; **b)** $\dfrac{1}{2}$; **c)** $4 + \log_3 7 + \log_7 3$; **d)** 2; **e)** $2 + \log_3 7 + \log_7 3$; **f)** 21.

Subiectul 12. Un număr natural de forma $\overline{abcba}$ se numeşte palindrom. Să se determine numărul palindroamelor $\overline{abcba}$ formate din 5 cifre, unde $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ şi a, b, c nu sunt neapărat distincte.
a) 343; **b)** 336; **c)** 448; **d)** 810; **e)** 900; **f)** 512.

Subiectul 13. Fie sistemul $\begin{cases} 3x - 4y + 2z &= 1, \\ x + ay + z &= 3, \\ 2x - 3y + 2z &= b. \end{cases}$ Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil nedeterminat.
a) $a = \frac{3}{2}, b = 6$; **b)** $a = \frac{3}{2}, b = -6$; **c)** $a = -\frac{3}{2}, b = 6$; **d)** $a = -3, b = 6$; **e)** $a = 3, b = -6$; **f)** $a = -\frac{3}{2}, b = -6$.

Subiectul 14. Inecuaţia $(x^2 - 1)(3x + 2) < 0$ are mulţimea soluţiilor
a) $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$; **b)** $(-\infty, -1)$; **c)** $(1, \infty)$; **d)** $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$; **e)** $\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$; **f)** $\left(-1, -\frac{2}{3}\right) \cup (1, \infty)$.

Subiectul 15. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + ax + b, & x < 0 \\ 2 + \mathrm{e}^{-2x}, & x \geq 0 \end{cases}$.
Dacă f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, atunci $a + b$ este
a) 0; **b)** $\frac{1}{3}$; **c)** 3; **d)** 4; **e)** 1; **f)** -1.

Partea a II-a Participanţii de clasa a XI-a redactează soluţia subiectulului 16.

Subiectul 16. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
i) Să se calculeze $\det(A)$.
ii) Să se arate că $A^{2n} = \dfrac{2^{2n} - 1}{3} A + \dfrac{2^{2n} + 2}{3} I_3$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
iii) Să se determine A^{-1}.

Clasa	a XII-a

Concursul de matematică "Marcel Roşculeţ"

Ediţia a XI-a, 18 mai 2024

Partea I Subiectele 1-15 au un singur răspuns corect.
În tabelul primit se marchează cu X răspunsul considerat corect şi cu — celelalte răspunsuri.

Subiectul 1. Calculaţi $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
a) $\frac{1}{2}$; **b)** $-\frac{1}{2}$; **c)** 1; **d)** 2; **e)** 4; **f)** -2.

Subiectul 2. Se consideră ecuaţia $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=m$, unde $m\in\mathbb{R}$. Mulţimea M a valorilor lui m pentru care ecuaţia are soluţie unică $x\in\mathbb{R}$ este
a) $(-\infty,2)$; **b)** $(1,\infty)$; **c)** $(2,\infty)$; **d)** $[2,\infty)$; **e)** $(-\infty,2]$; **f)** $\{2\}$.

Subiectul 3. Se consideră suma $S_n=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, unde n este număr natural, $n\geq 1$. Să se determine cel mai mic n pentru care $S_n\geq 100$.
a) 10201; **b)** 100; **c)** 1000; **d)** 10200; **e)** 101; **f)** 1001.

Subiectul 4. Fie $x,y,z\in\mathbb{C}$ astfel încât $|x|=|y|=|z|$ şi $xyz=xy+yz+zx=1$. Valoarea sumei $x+y+z$ este:
a) -1; **b)** 0; **c)** 1; **d)** i; **e)** $-$i; **f)** 2.

Subiectul 5. Dacă $3^x=7^y=441$, atunci $S=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ este
a) $\frac{1}{\log_3 21}+\frac{1}{\log_7 21}$; **b)** $\frac{1}{2}$; **c)** $4+\log_3 7+\log_7 3$; **d)** 2; **e)** $2+\log_3 7+\log_7 3$; **f)** 21.

Subiectul 6. Un număr natural de forma $\overline{abcba}$ se numeşte palindrom. Să se determine numărul palindroamelor $\overline{abcba}$ formate din 5 cifre, unde $a,b,c\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ şi a,b,c nu sunt neapărat distincte.
a) 343; **b)** 336; **c)** 448; **d)** 810; **e)** 900; **f)** 512.

Subiectul 7. Soluţiile ecuaţiei $2^{3x}+6=3\cdot 2^{2x}+2^{x+1}$ sunt
a) $\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$; **b)** $\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\}$; **c)** $\{\log_2 3,\log_2 4\}$; **d)** $\{-1,1\}$; **e)** $\{1,2\}$; **f)** $\left\{\frac{1}{2},\log_2 3\right\}$.

Subiectul 8. Fie $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Aflaţi toate matricele $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), B\neq 0_2$, astfel încât $A\cdot B=0_2$.
a) $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\-\alpha&-\beta\end{pmatrix}, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$; **b)** $\begin{pmatrix}2\alpha&2\beta\\-\alpha&-\beta\end{pmatrix}, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$; **c)** $\begin{pmatrix}-4&-4\\2&2\end{pmatrix}$;
d) $\begin{pmatrix}-2\alpha&-2\beta\\\alpha&\beta\end{pmatrix}, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha^2+\beta^2>0$; **e)** $\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$; **f)** $\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}$.

Subiectul 9. Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $f=\frac{x^2-9}{x-4}$, unde $D\subset\mathbb{R}$ este domeniul maxim de definiţie. Asimptotele funcţiei f sunt
a) $y=1$ spre $\pm\infty$ şi $x=4$; **b)** $y=x+4$ spre $\pm\infty$ şi $x=4$; **c)** $y=x$ spre ∞ şi $x=4$;
d) $y=x-4$ spre ∞ şi $x=4$; **e)** $y=x-4$ spre $\pm\infty$ şi $x=4$; **f)** $y=x+4$ spre $\pm\infty$ şi $x=\pm 2$.

Subiectul 10. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x+3)^5$. Atunci $f^{(4)}(3)$ este
a) $5!$; **b)** 12; **c)** $4!$; **d)** 6^{20}; **e)** $6!$; **f)** 6^5.

Subiectul 11. Aflaţi $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât mulţimea valorilor funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x+1}{x^2+x+1}$, să fie un interval de lungime 4.
a) $\alpha\in\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\}$; **b)** $\alpha\in\{-1,2\}$; **c)** $\alpha\in[-2,2]$; **d)** $\alpha=4$; **e)** $\alpha\in\left\{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\}$; **f)** $\alpha\in\{-2,4\}$.

Subiectul 12. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=ax^2+bx+c$, $\forall x\in\mathbb{R}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$. Dacă $f(k)=\dfrac{1}{k}, \forall k=\overline{1,3}$, calculaţi $f(4)$.
a) 0; **b)** $\dfrac{1}{2}$; **c)** $\dfrac{2}{5}$; **d)** $\dfrac{1}{4}$; **e)** $\dfrac{1}{6}$; **f)** $-\dfrac{1}{6}$.

Subiectul 13. Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\displaystyle\int_0^x (3t+5)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.
a) 3; **b)** 5; **c)** 8; **d)** 0; **e)** 2; **f)** ∞.

Subiectul 14. Valoarea integralei $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$ este
a) $\ln(\mathrm{e}^2+1)-1$; **b)** 2; **c)** $\ln(\mathrm{e}^2+1)+1$; **d)** 0; **e)** $2+\ln(\mathrm{e}^2+1)$; **f)** 1.

Subiectul 15. Să se determine parametrul $m\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul $P\in\mathbb{R}[X]$, $P=X^5-mX^4+mX-1$ este divizibil cu $(X-1)^2$.
a) $\dfrac{5}{2}$; **b)** 1; **c)** $\dfrac{5}{4}$; **d)** $\dfrac{4}{5}$; **e)** $\dfrac{5}{3}$; **f)** $\dfrac{3}{5}$.

Partea a II-a Participanţii de clasa a XII-a redactează soluţia subiectulului 17.

Subiectul 17. Fie funcţiile $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)$, şi $g:[0,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=|f(x)|$.
i) Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiei $f(x)$. Calculaţi $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.
ii) Determinaţi punctele de maxim local x_1 şi x_2 ale funcţiei $g(x)$. Demonstraţi că

$$\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}<\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x<g(x_1)+g(x_2).$$