

Clasa		a XII-a
-------	--	---------

Concursul de matematică "Marcel Roșculeț"

Ediția a XIII-a, 16 mai 2026

Partea I Subiectele 1-15 au un singur răspuns corect.

În tabelul primit se marchează cu X răspunsul considerat corect și cu — celelalte răspunsuri.

Subiectul 1. Mulțimea $M \subset \mathbb{R}$ a soluțiilor inecuației $\sqrt{\left|\frac{x+1}{x}\right|} \leq 1$ este :

- a) $(-\infty, -\frac{1}{2}]$; b) $(0, \infty)$; c) $(-\infty, 0)$; d) $(-\infty, -\frac{1}{4}]$; e) $(-\frac{1}{2}, 0)$; f) $[-\frac{1}{2}, 0)$.

Subiectul 2. Determinați mulțimea valorilor parametrului real m pentru care sistemul

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m + 1 \\ x + y + mz = (m + 2)^2 \end{cases} \text{ este compatibil.}$$

- a) $\{0\}$; b) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; c) $\mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$; d) $\{2, 3\}$; e) $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$; f) $\{1, -2\}$.

Subiectul 3. Aflați mulțimea valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ care verifică $\log_2 \frac{2x^2 + x}{x^2 + 2} > 0$.

- a) $(2, \infty)$; b) $(-2, 1)$; c) $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$; d) $(-\infty, -2)$; e) $(-2, \infty)$; f) $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$.

Subiectul 4. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3600x}{(x+2)^2}$. Calculați valoarea maximă a funcției f .

- a) 450; b) 900; c) 3600; d) 225; e) 1800; f) 2.

Subiectul 5. Pentru ce valori ale parametrului $m \in \mathbb{R}$ dreapta de ecuație $y = m$ este tangentă parabolei $y = -x^2 + 2x - 1$?

- a) $m = -2$; b) $m = 1$; c) $m = -1$; d) $m = 2$; e) $m = 0$; f) $m \in \{-1, 1\}$.

Subiectul 6. Fie funcțiile $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ 1, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$ și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = ((3x + 1)^5 - 2^{ax}) \text{sgn}(x)$, unde $a \in \mathbb{R}$ este parametru.

Valoarea parametrului a pentru care funcția f este derivabilă pe \mathbb{R} este

- a) $a = 5 \ln 2$; b) oricare $a \in \mathbb{R}$; c) $a = 15 \ln 2$; d) $a = 3 \ln 3$; e) nu există $a \in \mathbb{R}$; f) $a = \frac{15}{\ln 2}$.

Subiectul 7. Suma soluțiilor reale ale ecuației $6^x + 6^{2-x} - 37 = 0$ este :

- a) 0; b) 36; c) 37; d) 2; e) -36; f) -37.

Subiectul 8. Pentru câte valori $x \in \mathbb{Z}$ există combinațiile C_{2026}^k , unde $k = x^2 - 1011x$?

- a) 6; b) 1011; c) 3; d) 1012; e) 4; f) o infinitate.

Subiectul 9. Fie x_1 și x_2 soluțiile reale ale ecuației $x^2 + 2x + m = 0$, unde $m \in \mathbb{R}$. Determinați mulțimea valorilor parametrului m pentru care $0 < |x_1 - x_2| \leq 1$.

- a) $[\frac{3}{4}, \infty)$; b) $\{1\}$; c) $[\frac{3}{4}, 1)$; d) $\{\frac{3}{4}, 1\}$; e) $\{\frac{3}{4}\}$; f) $[\frac{3}{4}, 1]$.

Subiectul 10. Fie $m = \min\{a, b\}$ și $M = \max\{a, b\}$, unde a și b sunt numere reale pozitive astfel încât $a^2 = 2$ și $b^6 = 11$. Câte elemente are mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} | m \leq \sqrt[3]{x} \leq M\}$?
a) A este vidă; b) două; c) o infinitate; d) patru; e) trei; f) unul.

Subiectul 11. Câte puncte de extrem local are funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^{2026}(x^2 - 4)(x^2 - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$?
a) 3; b) 5; c) 2029; d) 4; e) 2026; f) 1.

Subiectul 12. Dacă $\frac{x^2 + a}{x^2 + b} \leq \frac{1 + a}{1 + b}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde $a > 0$, $b > 0$, atunci $b - a$ este:
a) 1; b) 3; c) 2; d) 0; e) 4; f) 9.

Subiectul 13. Fie $I = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \int_0^1 t^x e^t dt \right)$. Atunci:
a) $I = \infty$; b) $I = 1$; c) $I = 2$; d) $I = e$; e) $I = 0$; f) $I = \frac{1}{e}$.

Subiectul 14. Fie polinomul $f = X^{2026} + 7$. Aflați restul împărțirii lui f la polinomul $g = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$.
a) $X^3 + 2X^2 + 2X + 9$; b) $X^3 + X + 6$; c) $X + 7$; d) $X^3 - X^2 - 3X + 1$; e) $X^2 + X + 1$;
f) $X^2 + 1$.

Subiectul 15. Să se calculeze $\ell = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_1^\alpha \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx$.
a) $\ell = \frac{1}{2}$; b) $\ell = \ln 2$; c) $\ell = \frac{1}{4}$; d) $\ell = 2 \ln 2$; e) $\ell = 1$; f) $\ell = \frac{1}{2} \ln 2$.

Partea a II-a Participanții de clasa a XII-a redactează soluția subiectului 17.

Subiectul 17. Se consideră funcția $g : [0, 1] \rightarrow [0, e]$, $g(x) = xe^x$, $\forall x \in [0, 1]$, și funcția $f : [0, e] \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația $x = f(x)e^{f(x)}$, $\forall x \in [0, e]$.

a) Arătați că $g(x) \geq x$, $\forall x \in [0, 1]$. Studiați monotonia funcției g . Decideți dacă g este bijectivă.

b) Arătați că $0 \leq f(x) \leq x$, $\forall x \in [0, e]$. Studiați monotonia funcției f . Deduceți $f(0)$ și $f(e)$.

c) Să se calculeze integrala $I = \int_0^e f(x) dx$.